

MODELOVÁNÍ ZTRÁTY STABILITY PRUTU KROUCENÍM PŘI OSOVÉM TLAKU

Petr Frantík

1. ÚVOD

Řešení ztráty stability konstrukcí patří k nejnáročnějším úlohám jak z hlediska teoretického popisu, tak i při numerickém řešení. Víme, že ztráta stability znamená dosažení kritického bodu (často se jedná o tzv. bifurkaci) v němž konstrukce přechází na nový stav prudkým přechodovým jevem, který nazýváme katastrofou, viz Arnold (1983). Pro výpočet deformací pružných konstrukcí při dosažení a překročení bifurkačních bodů si již nevystačíme s lineárním popisem a to i v případě, uvažujeme-li lineární chování materiálu. Zvláště při sledování pokritického působení je třeba užít úplný geometrický model, který bez zanedbání vystihuje podstatné aspekty úlohy. Takový model je pak zpravidla silně nelineární a jeho analytické řešení je většinou velmi obtížné.

Obtížnost úlohy se objevuje i při jejím numerickém řešení. Tradiční metody pro diskretizaci kontinua, z nichž nejpoužívanější je metoda konečných prvků, se ukazují jako neefektivní, jak z hlediska složitosti výpočtu, tak i z hlediska časové náročnosti. Objevuje se zde prostor pro alternativní metody, více zaměřené na typické rysy pokritických úloh. Zajímavý přehled alternativních metod uvádí studie Henrych (1985). Inspiraci lze rovněž najít v teorii nelineárních dynamických systémů, viz např. Macur (1995), která měla stěžejní vliv na vznik dále popsaného modelu.

Jelikož je povaha pokritického působení silně nelineární, vzniká možnost existence více než jediného výsledného stavu. Při statickém řešení pokritické úlohy může být nalezený stav navíc stabilní nebo nestabilní. Vzhledem k obvyklé vnitřní nepředvídatelnosti procesu ztráty stability tak vzniká velmi náročný problém ověření správnosti dosažených výsledků i při "stabilním" výpočetním postupu. Pomocí dynamické simulace úlohy se některých z těchto popsaných těžkostí vyvarujeme. Jako příklad komplikovanosti pokritických úloh lze nabídnout studii Frantík (2005) o možných stavech tzv. vzpěradla, nazývaného rovněž von Misesův nosník, viz také Bažant a Cedolin (1991).

2. ÚLOHA

Jeden z možných způsobů ztráty stability přímého prutu konstantního průřezu zatíženého osovým tlakem je vybočení kroucením (angl. axial-torsional buckling, viz např. Bažant a Cedolin 1991). Příčinou takového vybočení může být zabezpečení prutu proti ohybu. Příspěvek si klade za cíl seznámení s podmínkami modelování tohoto jevu a dosaženými výsledky.

Mějme přímý prut konstantního průřezu tvaru rovnoramenného L-profilu z lineárního materiálu (tj. jednoose symetrický průřez, který nemá totožnou polohu středu smyku a těžiště). Tento profil je vhodný ze třech důvodů: snadno se modeluje, je otevřený a hlavně jeho střednice leží mimo hmotu prutu. Uvažujme případ, kdy pro délku prutu L a šířku průřezu b platí $L = 5b$. Prut zatížíme osovým tlakem a zabezpečíme jej proti vybočení

ohybem. Otázka tohoto zabezpečení není jednoduchá. Požadujeme, aby střednice prutu zůstávala přímá i po deformaci, viz obr. 1.



Obr. 1 Tlačený L-profil s vyznačenou střednicí

Uvažované způsoby zabezpečení lze rozdělit do tří skupin:

- Profil se ve zvolené síti vybaví výztužnými deskami tak, aby nedocházelo ke změně tvaru průřezu; v místě střednice budou desky opatřeny posuvným ložiskem, viz obr. 2a;
- Z vrcholu L-profilu se spustí do střednice tuhé sloupky s posuvným ložiskem; změna tvaru průřezu se neuvažuje, viz obr. 2b;
- Profil bude opatřen aktivními konstrukčními prvky sledujícími změny tvaru průřezu tak, aby posuvné ložisko bylo umístěno vždy v těžišti daného průřezu (vyžaduje mechatronické prvky);



Obr. 2 Varianty zabezpečení prutu proti vybočení ohybem

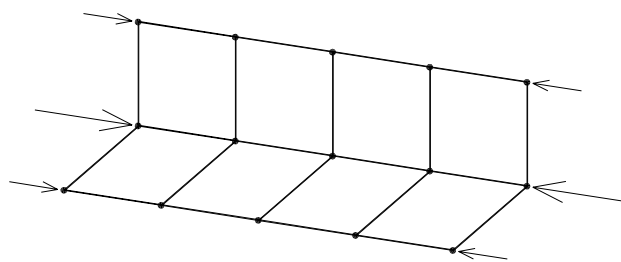
Požadavek přímosti střednice prutu i po deformaci zdůvodňuje důležitost nepřítomnosti hmoty prutu na střednici. V opačném případě je vybočení prutu kroucením hůře podmíněné. Hmoty na fixované střednici znesnadňuje vybočení prutu.

Pro simulaci ztráty stability byla užitá varianta výztužných desek se zabráněním změny tvaru průřezu. Tato varianta zjednodušuje modelování a navíc eliminuje efekty způsobené změnou průřezu, které jistě danou situaci zkomplikují.

3. MODEL

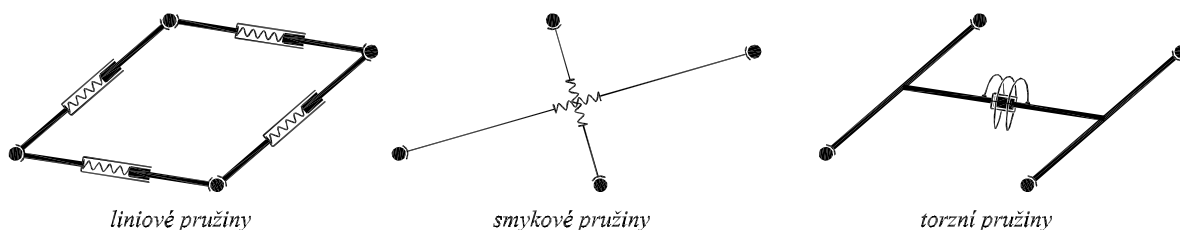
Model úlohy je založen na fyzikální diskretizaci prutu. Fyzikální diskretizací myslíme nahrazení spojitého pružného kontinua soustavou nehmotných pružin (obecněji i hmotných) spojících hmotné body (obecněji hmotné tuhé elementy), jejichž stav lze popsat diskrétní množinou stavových proměnných. Předpokládáme, že chování takového modelu vystihuje podstatné rysy úlohy při nižších nárocích na výpočetní i časovou složitost.

Na obr. 3 je znázorněno rozdělení L-profilu na dílce, v jejichž vrcholech jsou umístěny hmotné body. Zatížení osovým tlakem je provedeno pomocí trojice sil na volných koncích modelu prutu. Trojice sil má výslednici na střednici prutu i v případě změny tvaru průřezu.



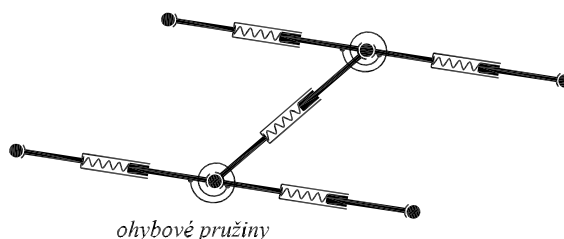
Obr. 3 Model L-profilu a jeho zatížení

Každý dílec, ze kterého se model prutu skládá, obsahuje vnitřní pružiny, jejichž schémata jsou zobrazena na obr. 4. Jedná se o liniové pružiny zajišťující normálovou tuhost a přenos ohybových momentů (viz dále), smykové pružiny pro přenos smyku v rovině dílce a torzní pružiny pro vytvoření kroučící tuhosti dílce.



Obr. 4 Model L-profilu a jeho zatížení

Již bylo zmíněno, že liniové pružiny plní rovněž funkci přenosu ohybových momentů. Proto jsou znázorněny na obr. 4 jako teleskopické tyče. Množinu pružin je totiž třeba doplnit rotační pružinou zajišťující vzájemnou ohybovou tuhost dvou spojených dílců. Znázornění této pružiny a její napojení na teleskopické tyče je vidět na obr. 5.

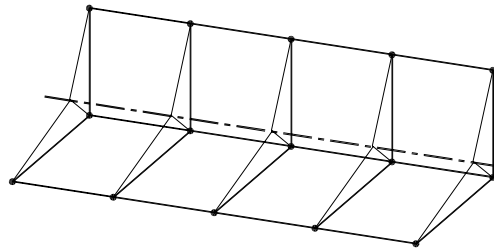


Obr. 5 Rotační pružiny pro přenos ohybu

Všechny typy popsaných pružin jsou v modelu uvažovány jako lineární, přičemž je pro definici jejich napjatosti užít úplný geometrický popis, viz publikace Frantík (2006). Množina popsaných pružin zřejmě vytváří úplný model prutu reflektující jeho přetvárné vlastnosti.

Model je formulován jako disipativní dynamický systém s polynomiálním viskózním útlumem, viz Frantík (2006), řešený numericky klasickou metodou Runge-Kutta. Úloha je tedy formulována dynamicky s tím, že statický stav je obdržen po ustálení systému do klidového stavu. Význam dynamického řešení, jak bylo zmíněno v úvodu, ve vyšší spolehlivosti nalezení správných klidových stavů.

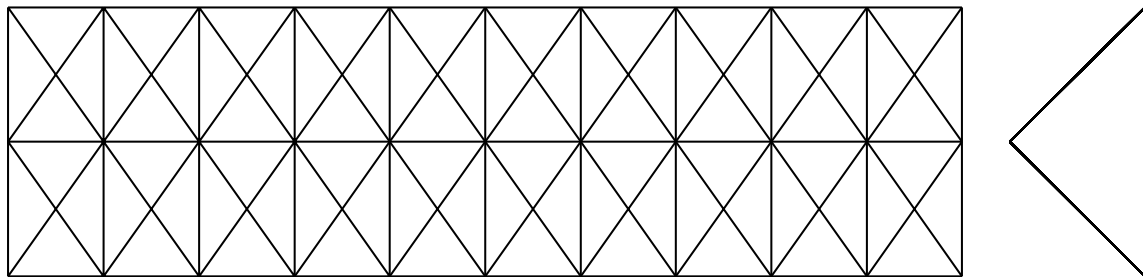
Zabezpečení střednice prutu je provedeno pomocí přidavných liniových pružin napojených na trojici hmotných bodů v každém průřezu prutu, viz obr. 6. V místě střednice prutu jsou pružiny napojeny na hmotné body s jedním stupněm volnosti ve směru střednice.



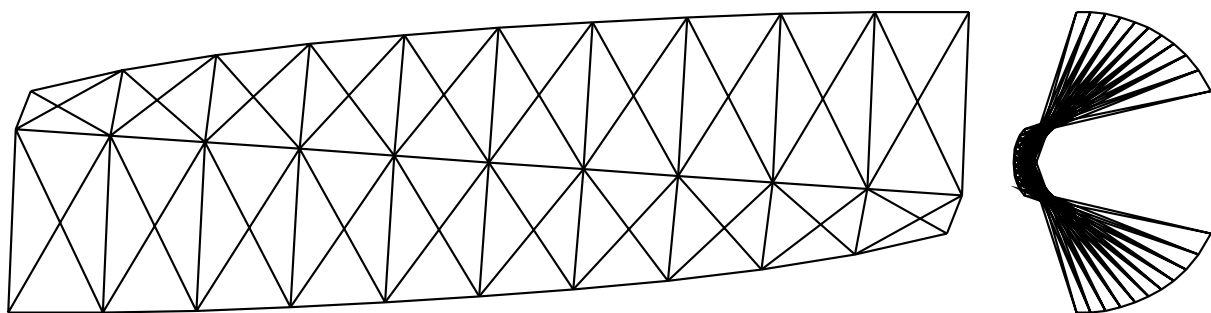
Obr. 6 Zabezpečení neproměnlivosti polohy střednice prutu

4. SIMULACE

Pro sledování ztráty stability kroucením L-profilu okolo jeho střednice byla provedena numerická simulace s výše popsáním modelem s deseti dvojicemi vzájemně kolmých dílců, viz obr. 7. Jeho parametry byly nastaveny tak, aby normálová a smyková tuhost byla dostatečně vyšší než tuhost v kroucení a v ohybu. Parametrizace studie je provedena prostřednictvím řídicího parametru zatěžování, kterým je vzpěrná síla F . Vlastnosti prutu jsou tak určeny pouze hodnotou kritické síly F_{cr} , při které prut vybočí kroucením okolo střednice².



Obr. 7 Nevybočený L-profil (dva vzájemně kolmé průměty)

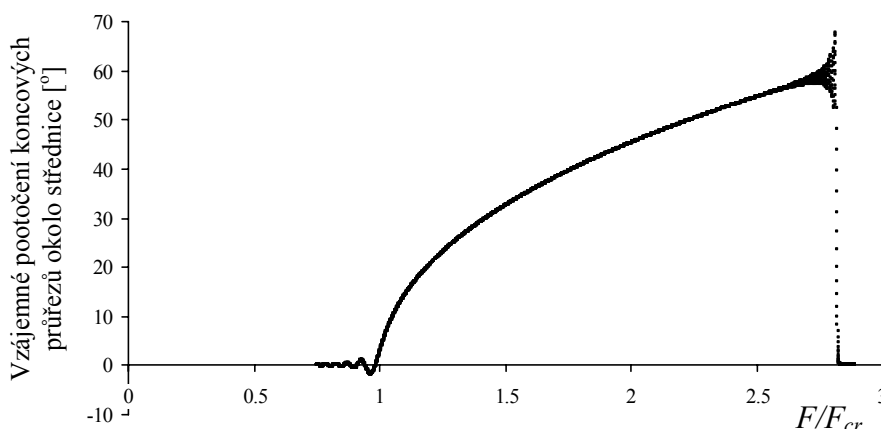


Obr. 8 Vybočený L-profil $F=2.5F_{cr}$ (dva vzájemně kolmé průměty)

² Teoretická hodnota této kritické síly nebyla v dostupné literatuře nalezena.

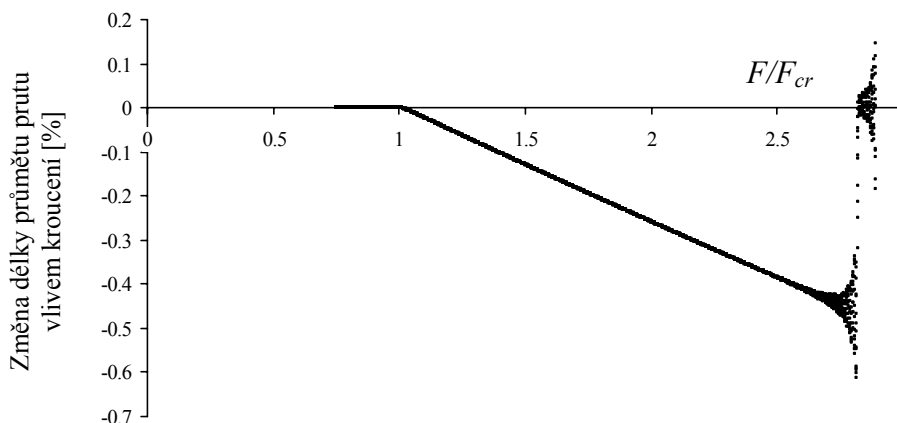
Simulace byla provedena následujícím způsobem: Počátečním stavem byl nepřetvořený prut zatížený silou $F = 2.89F_{cr}$. Vzpěrná síla F se pomalu lineárně snižovala až na hodnotu $0.75F_{cr}$. Pokles vzpěrné síly byl nastaven na hodnotu řádově $10^{-6} F_{cr}$ za časový krok (bylo spočítáno cca půl miliónu časových kroků). Trvání výpočtu simulace na běžném PC trvalo asi 6 minut³. Příklad tvaru vybočeného prutu je vidět na obr. 8

Na obr. 9 je vidět vypočtená závislost vzájemného pootočení koncových průřezů prutu okolo střednice. Je třeba zdůraznit, že znázorněné grafy jsou vynášeny jako přímý výsledek simulace. Nacházejí se zde i dynamické efekty. Počáteční stav je v grafech patrný vždy vpravo na ose. Při hodnotě vzpěrné síly cca $F = 2.83F_{cr}$ došlo ke katastrofické ztrátě stability vybočením prutu. Ustálení do klidového stavu lze uvažovat při hodnotě cca $F = 2.55F_{cr}$. Dosažení bifurkačního bodu – tzv. měkké ztráty stability – odpovídá hodnota $F = F_{cr}$.



Obr. 9 Závislost vzájemného pootočení koncových průřezů prutu okolo střednice na velikosti vzpěrné síly F

Na obr. 10 je zobrazena závislost změny délky průmětu prutu do jeho osy vlivem kroucení. Za povšimnutí stojí její téměř lineární charakter. Tato vlastnost umožnila zpřesnění stanovené hodnoty kritické síly. Další zajímavostí je zobrazený ustalovací děj na počátku simulace (v grafu zcela vpravo). Jedná se o dokmitávání z počátečního nepřetvořeného stavu.



Obr. 10 Závislost změny délky průmětu prutu vlivem kroucení na velikosti vzpěrné síly F

³ Procesor Intel Centrino 1500 MHz.

Pro maximální vybočení prutu byla ověřována hodnota změny tvaru průřezu prostřednictvím změny vzdálenosti konců profilu, která činila méně než 4% vlivem ztráty rovinnosti výztužné desky.

Z výsledků simulace je rovněž patrné, že průřezy se natáčejí i v ose kolmé na střednici (spojnice vrcholu profilu a nejbližšího bodu na střednici), viz obr. 8. Toto natočení má podobnou závislost na velikosti vzpěrné síly jako pootočení průřezu okolo střednice. Pootočení okolo střednice je přibližně 12.4 až 14.1krát větší než pootočení kolem osy kolmé. Větší hodnota odpovídá vzpěrné síle v blízkosti bifurkačního bodu a nižší hodnota maximum vzpěrné síly v simulaci. Lze říci, že toto natočení je hlavním důvodem ztráty stability, jelikož je zodpovědné za pokles působiště vzpěrné síly, čímž se realizuje její přetvárná práce.

3. ZÁVĚR

Príspevek se zabýval modelováním ztráty stability kroucením při osovém tlaku přímého prutu ve tvaru L-profilu kolem jeho střednice. Vybočení kroucením bylo zajištěno upevněním střednice prutu pomocí výztužných desek, čímž se zabránilo i změnám ve tvaru průřezu prutu.

Pro dynamickou simulaci zvolené úlohy byl vytvořen speciální model v duchu teorie nelineárních dynamických systémů. Modelování popsanou metodou fyzikální diskretizace se ukazuje vhodné pro analýzu silně nelineárních systémů, u nich je obtížné odhadnout, které předpoklady jsou pro řešení problému postačující. Významná je rovněž jednoduchost a efektivita numerického výpočtu oproti tradičním výpočetním metodám.

Príspevek ukazuje počáteční fázi výzkumu tohoto typu ztráty stability. Zobecnění uvedených závěrů a srovnání výsledků výpočtu s experimenty je záležitostí budoucí práce.

PODĚKOVÁNÍ

Tento výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT, projekt 1M6840770001, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS. Při řešení byly částečně využity teoretické výsledky dosažené v projektu GAČR 103/04/2092.

Príspevek vznikl díky podnětným rozhovorům s *doc. Ing. Petrem Janasem, CSc.*, vedoucím Katedry stavební mechaniky, Fakulty stavební, VŠB-TU Ostrava.

REFERENCE

V. I. Arnold (1983). *Teória katastrof* (orig. Teorija katastrof, vydavateľstvo Moskevské univerzity 1983), vydavateľstvo Alfa, Bratislava

Z. P. Bažant & L. Cedolin (1991). *Stability of Structures*, Oxford University Press, Oxford

P. Frantík (2005). Simulation of stability loss of von Mises truss in the state of unsymmetrical stress, *Inženýrská mechanika 2005*, CD sborník, Svratka, Česká republika

P. Frantík (2006). Simulace ztráty stability štíhlého prutu při kroucení, CD sborník mezinárodní konference *Modelování v mechanice 2006*, VŠB-TU Ostrava

J. Henrych (1985). *Úplná soustava finitních metod mechaniky a možnosti dalšího rozvoje*, studie ČSAV 6.85, nakladatelství Akademia, Praha

J. Macur (1995). *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*, skripta, nakladatelství PC-DIR, Brno